Mordell-Weil lattice と意義のある代数方程式の新しい系列(代数的整数論)

AUTHOR(S):

塩田, 徹治

数理解析研究所講究録
721巻 1990年 142-159

Mordell-Weil lattice と 意義のある代数方程式の新しい系列

立教大理学部　塩田徹治

1. 序

代数方程式を論ずるに当って，まず次の3つの概念の関係を思いおこしたい．k_0 を1つの体とする．

(1) 代数方程式

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$(a_1, \cdots, a_n \in k_0)$$

(2) 有限次 Galois 拡大

K / k_0

(3) $k = \bar{k}_0$（代数的閉包として）．有限 Galois set

M と Galois equivariant map $s : M \to k$ 」

これらの関係は，周知のように次の如くである：

まず (1) から出発するとき，（f を分離的として）

K = $f(X)$ の分解体

$M = \{$根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$　　$s : M \hookrightarrow k$

として，(2), (3) の data が自然に一意的に定まる．

次に(2)から出発すると、Kの生成元αをえらぶと
$K = k_0(\alpha)$ とできる。そこで、

$$f(X) = \alpha \text{ の } k_0 \text{ 上の最小多項式}$$

$$M = \{f(X) \text{ の根}\} = \{\alpha \text{ の } k_0\text{-共役}\}$$

とすれば、(1), (3) の data がきまる。注意すべきは、ここでは、これらの data は生成元のとり方によっていることである。また、(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) と考えるとき、一般に、もとの f に戻らず、しかも、次数 n も、大きくなってしまう(たとえば、$n=3$ で明らかなように)。

最後に、有限 $\mathrm{Gal}(k/k_0)$-set M があたえられると、

$$K = k_0(P \mid P \in M)/k_0 \quad \text{Galois 拡大}$$

が生じ、さらに、Galois equiv. map $s: M \to k$ があれば、Galois 理論により、

$$f(X) = \prod_{P \in M} (X - s(P)) \in k_0[X]$$

である。K_0 を $f(X)$ の分解体とすると、$K_0 \subset K$。
s が $M \xrightarrow{1:1} k$ ならば、$K_0 = K$。

さて、"意義のある"代数方程式とは、もちろん定義のできない主観的な響きの言葉だが、とりあえず、数学を豊かにする内容のある方程式、としておこう。

まず従来知られているものを幾つか例示すると、

1) 低次の方程式（1, 2, 3, 4 次まで）。これらが数学の発展に与えた影響は計り知れない。

2) 一般 n 次方程式

$a_1, \dots, a_n$ を基礎の体，たとえば $\mathbb{Q}$ 上代数的に独立とし，$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in k_0[X]$，$k_0 = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$，の根を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると

$$K = k_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$a_i = \alpha_1, \dots \alpha_n \text{ の } i \text{ 次基本対称式}$$

（根と係数の関係）

$$\mathrm{Gal}(K/k_0) = \mathfrak{S}_n \quad n \text{ 次対称群.}$$

とくに，$K^{\mathfrak{S}_n} = k_0$ であるが，より強く

$$\mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_n]$$

（対称式の基本定理：$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ としてよい。）

これは，多少の変更を加えて，次のようにみることもできる：

$a_1 = 0$ とし，$a_2, \dots, a_n$ は代数的独立としておくと，$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$．このとき

$$K = k_0(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \mathbb{Q}(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(a_2, \dots, a_n)) = \mathfrak{S}_n = W(A_{n-1})$$

$$\mathbb{Q}[\alpha_2, \dots, \alpha_n]^{W(A_{n-1})} = \mathbb{Q}[a_2, \dots, a_n]$$

ここで，$W(A_{n-1})$ は，A_{n-1} 型の Weyl 群 (cf. Bourbaki, Alg. de Lie ch 4–6)．最後の式は，reflection group に関する Chevalley

の定理の、特別な場合とみなすことができる。

上の1), 2)とは、趣を異にするが、意義のある代数方程式の例として、

3) <u>円分方程式</u> $x^n=1$.

<u>2項方程式</u> $x^n=a$.

前者は、円分体の理論へ、後者は、巡回拡大ないしKummer拡大の理論へと、人を導く。一つの見方では、これは、乗法群 $\mathbb{G}_m$ の <u>n等分点</u>の方程式、あるいは、n乗写像の核ないし、一般点aの逆像を記述する方程式に他ならない。この見方から次の4), 5)は自然な拡張である

4) 楕円曲線(楕円関数)の等分方程式、および isogeny (変換の理論).

これは、現在でも重要な研究対象であるmodular関数, modular curves, およびそれに関連する様々の数論的研究の発祥の地である。(志村・谷山: "近代的整数論", はじめの興味ある歴史, を参照されたい。)

この場合、楕円曲線 E/k_0 の n等分点のなす ~~集~~set $E[n]=\{P\in E(\bar{k}_0)\mid nP=0\}$ は、群 $(\simeq(\mathbb{Z}/n)^2$ if char ∤ n) となるので、単なるGalois setでなく、Galois moduleであり、Galois表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(k/k_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E[n]) = GL_2(\mathbb{Z}/n)$$

がより自然かつ重要な研究対象であることは、周知の通りである。

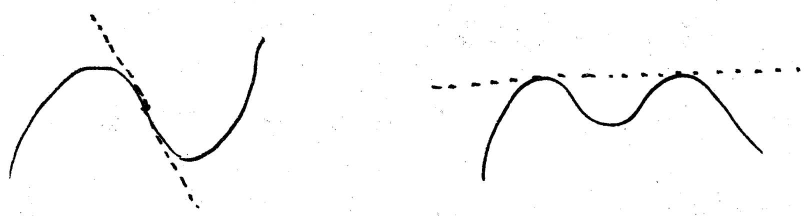
5). 4) の高次元アーベル多様体への拡張.

これらについては、これ以上ふれないが、ただ、等分点すなわち、有限位数の点が主役で、無限位数のものは考えられていないことを注意しておきたい。

以上の 3), 4), 5) とは、少し流れを異にして、より幾何的な観点からよく研究された古典的な例として、

イ) 平面3次曲線の 9コの変曲点.

ロ) 平面4次曲線の 28本の double tangents



ハ) 3次曲面 ($\subset \mathbb{P}^3$) 上の 27本の lines, がある.

これらの有限集合は、曲線ないし曲面の定義体を k_0 とすると、$\mathrm{Gal}(k/k_0)$-set である。群論の初期から、(たとえば、Jordan の"置換群論" ~~本~~) 群論と Combinatorics の代表的な例として (単なる例以上のものとして) 扱われている。(cf Weber: Lehrbuch der Algebra; v.d. Waerden: Alg. Geom. 入門).

さて，イ)は，楕円曲線の3分点に他ならず，前記4)の特別な例ともみなされる．また ロ)は，4次曲線(種数3)のヤコビ多様体 J の 2等分点と関係し，従って，問題の群は $SL_2(\mathbb{Z}/3)$ 又は $Sp(6,\mathbb{Z}/2)$ (ないし，その部分群)となる．ハ)は，直接，アーベル多様体の等分点とは関係なく，これは，より一般に，del Pezzo surface と呼ばれる有理曲面上の，第1種例外曲線 の理論に ~~[illegible]~~ 拡張される．(cf. Manin: Cubic Forms.)．ハ)の群は，$W(E_6)$で，指数2の非可換単純群(位数 $2^6\cdot 3^4\cdot 5$)を含む．(k_0が"generic"なとき．)

後にふれるように，ロ)，ハ)は，ある楕円曲線の無限位数の点と関係づけることができ，その観点から，この古典的理論に新しい光をあてることができる．(本文末尾，[illegible])

より一般に，我々は，関数体上の楕円曲線の Mordell-Weil lattice から，~~[illegible]~~ 自然な finite Galois sets および代数的方程式 を定義することができ，その応用として，たとえば ① $\mathbb{Q}(t)$上(比較的)高い rank をもつ楕円曲線の構成(+ explicit basis)や ② "大きな"有限ガロア表現の構成，③(特別な場合として)円分体の興味ある拡大，などを得ることができる．

2. Mordell-Weil Lattices.

この理論の詳細は、準備中であるが、概略は、Proc. Japan Acad. 65A. (1989) の "Mordell-Weil lattices and Galois representation, I, II, III", あるいは、同題の代数学シンポジウム報告集 (1989夏. 札幌) 所収の note を参照されたい。ここでは、その一部を述べる。まず

記号

k : 任意標数の代数的閉体.

$K = k(C)$: k上の曲線Cの関数体, i.e. 1変数関数体,

E/K: K上定義された楕円曲線. たとえば、

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$
$$(a_1, \cdots, a_6 \in K)$$

のような Weierstraß form に表したものとしてよい。

$E(K)$: EのK-有理点のなす群.

$= \{(x, y) \mid$ 上式をみたす $x \in K, y \in K$ の組$\} \cup \{O\}$.

$f: S \longrightarrow C$, E/K の Kodaira-Néron model.

(即ち. S は. (k上の) 楕円曲面. f は. その elliptic fibration を与える morphism & f の generic fibre $= E/K$)

(仮定) f は少くとも1つ singular fibre をもつ. 即ち f は non-smooth. (たとえば. E の j-invariant が $\notin k$ ならば. この仮定がみたされるが. これは必要条件ではない)

この仮定の下に、$E(K)$ は、有限生成のアーベル群となる(Mordell-Weil の定理)ので、$E(K)$ は M.W. 群とよばれる。$E(K) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus r} + $(有限アーベル群)となる $r \geq 0$ を、E/K の (Mordell-Weil) rank という。

$E(K)$ の元、即ち E の K-有理点は、$f: S \to C$ の section $s: C \to S$, $f \circ s = id_C$, と 1:1 に対応する。$E(K) \ni P$ に対応する section を同じ記号 P で表わし、ただ section の像として、S の曲線(因子)と考えるときは、(P) とかく。

代数曲面 S の上の交点理論を用いて、$E(K)$ 上の自然な pairing $E(K) \times E(K) \longrightarrow \mathbb{Q}$ を、次のように定義することができる。$P, Q \in E(K)$ に対し

$$\langle P, Q \rangle = \chi + (PO) + (QO) - (PQ) - \sum_{v \in R} \mathrm{Contr}_v(P, Q)$$

$$\langle P, P \rangle = 2\chi + 2(PO) - \sum_{v \in R} \mathrm{Contr}_v(P).$$

ここで、χ は、S の arithmetic genus(仮定の下に $\chi > 0$)、(PO) は、S 上の因子 (P) と (O) の交点数、(O は、0-section)、(QO), (PQ) は、同様の意味、$\mathrm{Contr}_v(P, Q)$ は、各 $v \in R$(ただし、R は、f の reducible fibres の集合)に対し、(P), (Q) が $f^{-1}(v)$ のどの既約成分を通るかで定まる局所的な contribution ($\in \mathbb{Q}$, ≥ 0), $\mathrm{Contr}_v(P) = \mathrm{Contr}_v(P, P)$.

<u>Th.1</u> (i) 上の pairing は、$E(K)/(\mathrm{tor})$ 上に、正定値な pairing をひきおこす。

(ii). $E(K)^0 \subset E(K)$ を、$\{P \in E(K) \mid (P)$は、$\forall v \in R$ について、$f^{-1}(v)$ の (O) と交わる既約成分 $\Theta_{v,0}$ を通る$\}$ により定義すると、$(E(K)^0, \langle\,,\,\rangle)$ は、正定値, even, integral lattice になる。($[E(K):E(K)^0] < +\infty$).

<u>Def</u>. $E(K)/(\mathrm{tor})$ を、E/K の <u>Mordell-Weil lattice</u>, $E(K)^0$ を、<u>narrow Mordell-Weil lattice</u> とよぶ。
一般に、M.W. lattice は、narrow M.W. lattice の dual lattice に含まれるが、一致するとは限らない。

以下、S が有理曲面（すなわち、その関数体 $k(S)$ が k 上の2次元純粋超越拡大）のときを主に扱う。このとき、$f: S \to C$ に関する(仮定)は、自動的にみたされる。また $K = k(t)$.

<u>Th.2</u>. E/K について、S が有理曲面とする。このとき、

(i) $r = 8 - \sum_{v \in R}(m_v - 1) \leq 8$, $\left(m_v = \#\text{ irred. comp. of } f^{-1}(v),\ v \in R\right)$

(ii) $L = E(K)^0$ とおくと、

$$\begin{array}{ccll} E(K)/(\mathrm{tor}) & \cong & L^* = L \text{ の dual lattice} & \\ \cup & & \cup & \Big]\ \text{index } \nu \\ E(K)^0 & \cong & L & \end{array}$$

$\nu = \det L = \det T/n^2$, ($T$ は "trivial lattice".)

(iii) $n^2 = |E(K)_{tor}|^2 \mid \det T = \prod_{v \in R} m_v^{(1)}$, ($m_v^{(1)} = \#$ simple irred. comp. of $f^{-1}(v)$).

(Tの定義は，省略するが，可約な singular fibres $f^{-1}(v)$ ($v \in R$) のタイプで完全にきまるものである。)

Th 3. (構造定理). 上の仮定の下に．

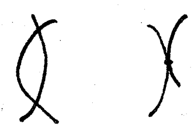
(i) $r = 8 \iff R = \phi$ ，このとき

$$E(K) = E(K)^0 \simeq E_8 .$$

右辺は，E_8型の root lattice，すなわち，rk 8 の正定値，even integral かつ det = 1 なる (unique) lattice である

(ii) $r = 7 \iff R = \{v\}$ (1つ)，$m_v = 2$ (type I_2 又は III，即ち，2本の $\mathbb{P}^1$ が，2点で交わっているか，1点で接する)

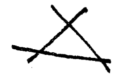
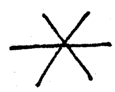
このとき．



I_2 III.

$$\begin{array}{ccccl} E(K) & \simeq & E_7^* & & \\ \cup & & \cup & & \text{index } 2 \\ E(K)^0 & \simeq & E_7 & & \end{array}$$

(iii) $r = 6 \iff$ a) $R = \{v\}$ (1つ)，$m_v = 3$.
又は
b) $R = \{v, v'\}$ (2つ)，$m_v = m_{v'} = 2$.

$R = \{v\}$ のときは，type I_3  又は，IV  のように 3本の $\mathbb{P}^1$ が，交わっている singular fibre $f^{-1}(v)$ があらわれる．

このとき

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{a)} & & & \text{b)} & \\ E(K) & \simeq & E_6^* & & & D_6^* & \\ \cup & & \cup & \text{index } 3 & , & \cup & \text{index } 4. \\ E(K)^0 & \simeq & E_6 & & & D_6 & \end{array}$$

etc. ┘

ここに現われる root lattices $E_8, E_7, E_6, \cdots$ などは非常によく性質の分った lattice で，とくに次表のような data が知られている．(cf. Bourbaki(前出)，または Conway-Sloane: "Sphere packings, lattices, & groups".)

	E_8	E_7	E_7^*	E_6	E_6^*
det	1	2	1/2	3	1/3
min. norm	2	2	3/2	2	4/3
# min. vectors	240	126	56	72	54
Aut	$W(E_8)$	$W(E_7)$		$W(E_6)\{\pm 1\}$	

さらに，これらの lattice の各々は，minimal vectors の中から，生成元をとることができる．この事実を，上の Th. 3 により，Mordell-Weil lattices に適用すると，$E(K)$ の生成元についての重要な情報を与える．

E/K が Weierstrass form で与えられるときは，さらに具体的な結果が得られる．簡単のため，$\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$ とし，

$$E : y^2 = x^3 + p(t)x + q(t),$$

$$p(t) \in k[t], \quad q(t) \in k[t], \quad \deg p \leq 4, \ \deg q \leq 6$$

とする．Th. 2 (ii), (iii) の v として $t=\infty$ をえらぶことにする（即ち $f^{-1}(\infty)$ を reducible fibre とする）．このとき，

Th. 4. (Min. vectors & generators)

(i). $r=8$ のとき. $\langle P, P\rangle = 2$ なる $P \in E(K)$ は 240コ存在して. それらは. 次の形で与えられる. $P=(x, y)$

$$x = gt^2+at+b, \quad y = ht^3+ct^2+dt+e$$
$$(g, h, a, b, c, d, e \in k)$$

(ii) $r=7$ のとき. $\langle P, P\rangle = \frac{3}{2}$ なる P が 56コ存在して. 次の形 : $P=(x, y)$,

$$x = at+b, \quad y = ct^2+dt+e$$

(iii) $r=6$, E_6^* のとき $\langle P, P\rangle = \frac{4}{3}$ なる P が 54コ存在して. (ii) と同じ形で与えられる.

いずれの場合も. Mordell-Weil 群 $E(K)$ は. 上の形の r コの点により生成される」

3. Mordell-Weil lattice から生ずる代数方程式

今度は k_0 を任意の体とし. $k=\bar{k}_0$ を代数的閉包とする. C を k_0 上定義された曲線, $k_0(C)$ をその関数体. $K=k(C)$, E を $k_0(C)$ 上定義された楕円曲線とし. Mordell-Weil lattice $E(K)/(tor)$ 又は $E(K)^0$ を考える.

ガロア群 $Gal(k/k_0)$ は. 自然に $E(K)$ に作用し, しかも pairing $\langle\ ,\ \rangle$ が $Gal(k/k_0)$-不変であることから. 表現

$$\rho : Gal(k/k_0) \longrightarrow Aut_{\langle,\rangle}(E(K)^0) \ (=有限群)$$

を得る. 拡大 $\mathfrak{K}/k_0$ を. $\mathrm{Ker}(\rho)$ に対応するものとする. いいかえれば. $\mathfrak{K}$ は. $E(k(C)) = E(\mathfrak{K}(C))$ となる最小の拡大体で $Gal(\mathfrak{K}/k_0) \subseteq Aut_{<,>}(E(K)^0)$ となる.

ガロア表現 ρ の像 $\mathrm{Im}(\rho)$ については. ① $\mathrm{Im}(\rho)$ が大, 即ち. 全射のとき, ② $\mathrm{Im}(\rho)$ が小. 即ち $\mathrm{Im}(\rho)=\{1\}$ のとき, および ③ それ以外のとき. 夫々の面白さがある.

それはともかく. 代数方程式を定義するために. §1 の記号で. 有限 Galois set $M \subset E(K)$ を定義したが. 今の場合 それは. 多様なえらび方が出来る. たとえば

$$M_n = \{P \in E(K) \mid \langle P,P \rangle = n\}. \quad (n>0)$$

とこれ. $n_0 =$ min. norm に対する M_{n_0} は重要である.
$\mathfrak{K}_n = k_0(P \mid P \in M_n)$ とおくと. $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_n/k_0$ がガロア拡大であり. M_n が r つの独立な P を含めば. $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}$.

次に. Galois equivariant map $s : M \longrightarrow k$ として. specialization homomorphism sp_v' の M への制限をとることができる. ここで

$$sp_v' : E(K) \longrightarrow \mathbb{G}_a(k) \text{ 又は } \mathbb{G}_m(k)$$

は. 各 v ($f^{-1}(v)$ は sing. fibre) に対し定義される homo.

$$sp_v : E(K) \longrightarrow f^{-1}(v)^{\#} = \text{smooth part of } f^{-1}(v)$$
$$P \longmapsto (P) \cap f^{-1}(v)$$

と. $f^{-1}(v)^{\#}$ の単位元成分 $\mathbb{G}_a$ 又は $\mathbb{G}_m$ への"射影"との合成である.

上のように、$E/k_0(C)$, $M \subset E(K)$, v を定めると、

$$\boxed{\Phi(X) = \prod_{P \in M} (X - sp_v'(P)) \in k_0[X]}$$

なる次数 $= \# M$ の k_0 係数多項式が得られる。これが我々の提唱する代数方程式である。

具体的な例をとって、その"意義"をみてみよう。今、

$$(E_8) \quad y^2 = x^3 + x(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3) + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + t^5)$$

$$(E_7) \quad y^2 = x^3 + x(p_0 + p_1 t + t^3) + (q_0 + q_1 t + \cdots + q_4 t^4)$$

$$(E_6) \quad y^2 = x^3 + x(p_0 + p_1 t + p_2 t^2) + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + t^4)$$

を $k_0(t) = \mathbb{Q}(p_i, q_j)(t)$ 上の楕円曲線と考える。これらは rational double points とよばれる特異点の universal deformation として知られる family である。p_i, q_j は $\mathbb{Q}$ 上代数的独立とする。$k = \overline{k_0}$ とすると、Mordell-Weil lattice $E(K)$ は、夫々 E_8, E_7^*, E_6^* と同型になる。(Th.3 参照)。その理由は、対応する楕円曲面 $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が、(E_8) の場合、可約 fibre をもたず ($R = \phi$)、(E_7), (E_6) のときは、夫々、唯1つの可約 fibre $f^{-1}(\infty)$ をもち、そのタイプは、III ないし IV である(ことが容易に分る)からである。$M \subset E(K)$ として、min. norm をもつ P の集合をとる。Th 4 の記号を用いて、$sp_\infty'(P)$ は、次のように

与えられる．

Lemma. $sp'_\infty(P) = \begin{cases} \dfrac{g}{h} & r=8 \text{ のとき} \\ -c & r=7 \\ \pm a & r=6 \end{cases}$

このようにして，我々は (E$_r$) 型の"基本方程式"

$$\Phi_{E_r}(X) = \prod_{P\in M}\left(X - sp'_\infty(P)\right) \in k_0[X]$$

$$\deg \Phi_{E_8} = 240, \quad \deg \Phi_{E_7} = 56, \quad \deg \Phi_{E_6} = 54$$

を得る．ここで，Φ_{E_8}, Φ_{E_7} は，実際は，X^2 の多項式となり，Φ_{E_6} は $\Phi(X)\cdot\Phi(-X)$，$\deg\Phi = 27$，と分解する．

「<u>Th.</u> Φ_{E_8}, Φ_{E_7}, Φ_{E_6} は，$\mathbb{Q}[p_i, q_j][X]$（あるいはより強く，$\mathbb{Z}[p_i, q_j][X]$）に属する既約多項式で，そのガロア群は，$W(E_8)$, $W(E_7)$, $W(E_6)$ 自体になる。」 （§1. の例2）と比較されたい．）

さらに上の Lemma と，sp'_∞ が group homo. である（実は，今の場合 sp'_∞ が group isom. になっている！）ことより，これら"基本方程式"を explicit に求めることができる．これは，(E_8), etc の定義式にあらわれる係数 p_i, q_j を，Weyl 群 $W(E_8)$, etc. の基本不変式として，具体的に書き表わせることを意味している：

(+) $\quad p_i,\ q_j = I_w(u_1, \cdots, u_r) \quad (u_i = sp'_\infty(P_i),\ 1\le i\le r).$

4. 応用として、$\mathbb{Q}(t)$上 比較的高い rank をもつ楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(t)$ を、Mordell-Weil 群 $E(\mathbb{Q}(t))$ の生成元とともに、構成する方法を述べる。(実は、$\mathbb{Q}$ の代りに、どんな体をとってもよい。(標数$\neq 2,3$, 他有限個のpを除く))

仮に $u_1,\cdots,u_8$ が E_8-lattice の基本 root とするとき、240コの全ての roots u_i を、$u_1,\cdots,u_8$ の $\mathbb{Z}$-1次結合と表す。次に、$\delta(u)=\prod_{i<j}(u_i-u_j)$ を $u_1,\cdots,u_8$ の多項式とみなす。このとき

Th(E_8). 任意の $(u_1,\cdots,u_8)\in\mathbb{Q}^8$ で $\delta(u)\neq 0$ なるものをとり、$p_i, q_j\in\mathbb{Q}$ を、基本不変式 $\Phi_{E_8}(X)$ の(+):“根と係数の関係”から定める。このとき、式(E_8)で定義される楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(t)$ は、rank $r=8$ で、そのMordell-Weil 群の生成元として P_i $(1\leq i\leq 8)$

$$P_i : \begin{cases} x = u_i^{-2}t^2 + a_i t + b_i \\ y = u_i^{-3}t^3 + c_i t^2 + d_i t + e_i \end{cases}$$

がとれる。ここで u_i $(1\leq i\leq 8)$ は、はじめに任意に与えた値であり、他の $a_i,\cdots,e_i$ は、$u_1,\cdots,u_8$ から有理的に定まるものである。」

同様な Th. が (E_7), (E_6) および幾つかの他のルート系の型についても成立する。しかも、これは、実例を構成するのに十分な algorithm を与えている。

以上の詳細は目下準備中*である。

また"大きな" Galois 表現（あるいは拡大）の構成、その他の応用については、他日に譲りたい。

（以上）

*) "Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups."

#) §1. 例ロ), ハ) との関連について。$E/K = k(t)$ が Th.3 のように、$E(K) \cong E_8, E_7^*$ または E_6^* となる場合には、対応する楕円曲面 S から、$d = 9 - r$ ($= 1, 2$ または 3) 個の（第1種）例外曲線を、つぎつぎに blow down することにより、degree d の del Pezzo 曲面 V ができる。$r = 6$, $d = 3$ のときは、V は、$\mathbb{P}^3$ の3次曲面になる。$r = 7$, $d = 2$ のときは、canonical map $|K_V| : V \to \mathbb{P}^2$ は、2次の写像で、分岐は、$\mathbb{P}^2$ の4次曲線に沿っておこる。いずれの場合にも、$\langle K_V \rangle^{\perp}$ ($\subset NS(V)$) は、narrow M.W. lattice $E(K)^0$ と同型になり（pairing の符号を反対にして）、V 上の第1種例外曲線は、$E(K)$ 内の minimal vectors として（$r=6$ のときは、その半分として）完全に特徴付けられる。よって、例ロ), ハ) は、Mordell-Weil lattices の理論の枠で、よりよく理解され、とくに、$sp : M \to k$ なる写像は、古典的理論では、必ずしも明らかでない。

といいきるのは少々言い過ぎであって、昔の数学者の知恵は素晴らしく、del Pezzo surface の理論でも、cuspidal cubic と、その上の座標（つまり $\mathbb{G}_a$ の相当物）を用いている。(cf. Demazure, SLN.777 に現代的解説がある。)。しかし、elliptic surface における specialization map sp_v は、はるかに分り易くなっている、といってよいであろう。

我々の方法で、上のような del Pezzo surfaces と、その上の第1種例外曲線（$d=1,2,3$ に従って夫々 240, 58, 27 個存在）を具体的に構成することが出来、とくに、その上へのガロア群の作用をみることが出来る。さらに、これら全ての第1種例外曲面が $\mathbb{Q}$ 上定義されるような del Pezzo surfaces$/\mathbb{Q}$ の実例を与えることもできる。

（以上）